1- V bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x \in V$ elemanının boyu $\|x\|$ ile gösterilir ve

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre $x_0 = \dfrac{x}{\|x\|}$ vektörü:

$$\|x_0\| = \sqrt{\langle x_0, x_0 \rangle}$$

$$= \sqrt{\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle}$$

$\ulcorner \langle cu, v \rangle = \langle u, cv \rangle = c\langle u, v \rangle$ özelliğinden, $c \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$ $\lrcorner$

$$= \sqrt{\frac{1}{\|x\|^2} \langle x, x \rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\|x\|^2} \|x\|^2} = 1$$ olup x_0 birim vektördür.

2- V bir reel iç çarpım uzayı olsun. $\forall x, y \in V$ eleman çifti ortogonal olmak üzere

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

iç çarpım lineer bir fon.

$$= \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=0} + \langle y, y \rangle$$

$x, y \in V$ ortogonal old. $\langle x, y \rangle = 0$ ve $\langle y, x \rangle = 0$ dır.

$$= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2$$

elde edilir.

3- $\{x+y, x-y, x+y+2z\}$ kümesi için

$c_1(x+y)+c_2(x-y)+c_3(x+y+2z)=\vec{0}$ olacak şekilde

c_1, c_2, c_3 skalerlerına bakalım:

$\Rightarrow c_1x+c_1y+c_2x-c_2y+c_3x+c_3y+2c_3z=\vec{0}$

$\Rightarrow (c_1+c_2+c_3)x+(c_1-c_2+c_3)y+2c_3z=\vec{0}$ yazılır.

Hipoteze göre $\{x, y, z\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_1-c_2+c_3=0 \\ 2c_3=0 \end{cases}$$ olur. Buradan $c_3=0$ açıktır.

Ayrıca $c_3=0$ olduğu için 1. ve 2. denklem

$$\begin{array}{rl} & c_1+c_2=0 \\ + & c_1-c_2=0 \\ \hline & 2c_1=0 \end{array}$$

haline gelir. O zaman,

$c_1=0 \Rightarrow c_2=0$ bulunur. Bunun anlamı

$\{x+y, x-y, x+y+2z\}$ sistemi lineer bağımsızdır.

4- $W=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid \underbrace{a+b+c=0}_{c=-a-b}\}$ alt uzayı için:

$(a,b,c)=(a,b,-a-b)$

$=a(1,0,-1)+b(0,1,-1)$ şeklindedir. Bunun

anlamı $\forall(a,b,c)\in W$ elemanı $(1,0,-1)$ ve $(0,1,-1)$ elemanlarının

lineer birleşimi olarak yazılır. Yani,

$W = Sp\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ dır. Bu ise

germe aksiyomunun sağlandığını gösterir. Diğer taraftan,

$(1,0,-1) = \lambda(0,1,-1)$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathcal{F} = \mathbb{R}$

skalar var olmadığı için

$\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ sistemi lineer bağımsızdır.

Sonuç olarak, $W \subset \mathbb{R}^3$ alt uzayının

- Lineer bağımsız
- Germe

aksiyomlarının sağlandığı bir $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ sisteminin

varlığı gösterildi. Öyleyse

$\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ sistemi W'nın bir bazı olup

$boy W = 2$ elde edilir.

5– $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x_1,x_2,x_3) \to L(x_1,x_2,x_3) = (x_1, -x_3, x_2)$ dönüşümü için:

i– $\forall \alpha = (x,y,z),\ \beta = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ için

$\alpha + \beta = (x,y,z) + (a,b,c) = (x+a, y+b, z+c)$ dır. Buradan

$$
\begin{aligned}
L(\alpha+\beta) &= L\big((x+a, y+b, z+c)\big) \\
&= L(x+a, y+b, z+c) \quad \downarrow L\text{'ye göre} \\
&= \big(x+a, -(z+c), y+b\big) \\
&= (x+a, -z-c, y+b) \\
&= (x,-z,y) + (a,-c,b)
\end{aligned}
$$

$= L(\alpha) + L(\beta)$ elde edilir.

ii- $\forall \alpha = (x, y, z) \in W$ ve $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$c\alpha = c(x, y, z)$

$= (cx, cy, cz)$ dır. Buradan,

$L(c\alpha) = L(cx, cy, cz)$ ↓ L'ye göre

$= (cx, -cz, cy)$

$= c(x, -z, y)$

$= cL(\alpha)$ elde edilir. O halde, L dönüşümü (i) ve (ii) koşullarını sağladığından bir lineer dönüşümdür.